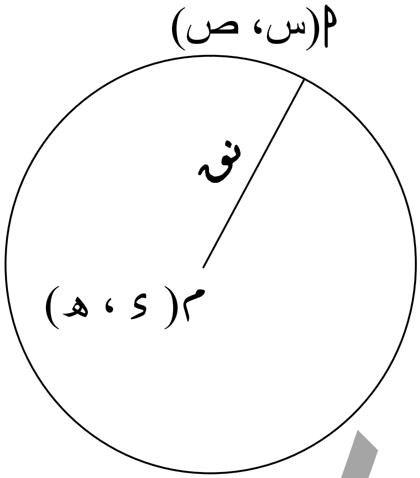
معادلة الدائرة
The equation of a circle

الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على بعد ثابت من نقطة ثابتة فى نفس المستوى وتسمى مركز الدائرة .

اولاً:معادلة الدائرة بدلالة إحداثى مركزها م وطول نصف قطرها نق

❁ إذا كانت أ= (س، ص) نقطة على الدائرة التى مركزها النقطة م =(ء ، هـ) وطول نصف قطرها نق فان معادلتها هى:

$$(\text{س} - \text{ء})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{نق}^{٢}$$



❁ ملاحظة (١)

إذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل فإن معادلتها هى :

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$$

❁ملاحظة (٢)

إذا كانت أ(س١، ص١)،ب(س٢، ص٢) نقطتين فى المستوى فإن

١ـ البعد بين النقطتينأ، ب هو : $\text{أ ب} = \sqrt{(\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}}$

٢ـ إحداثيا منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها النقطتين أ، ب هو :

$$\text{م} = \left(\frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢}}{٢} ، \frac{\text{ص}_{١} + \text{ص}_{٢}}{٢}\right)$$

مثال ١

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م (٧ ، -١) وطول قطرها يساوى ٨ وحدات طول .

الحل

∵ م (٧ ، -١)

∴ ء = ٧ ، هـ = -١

نق = $\frac{٨}{٢}$ = ٤سم

∵ (س – ء)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

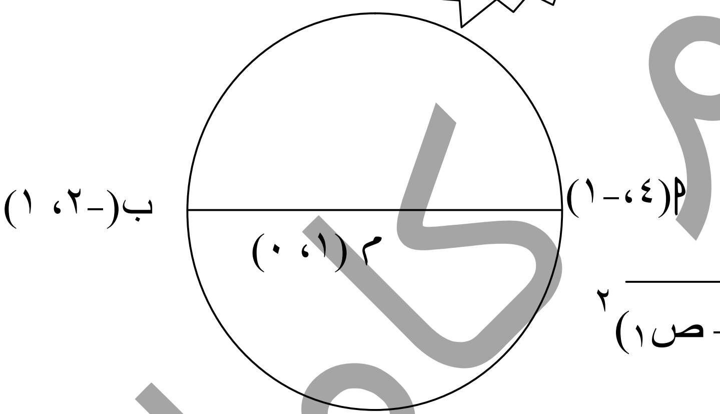
∴ (س – ٧)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤^{٢}

∴ (س – ٧)^{٢} + (ص + ١)^{٢} =١٦

مثال ٢

أوجد معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ = (٤ ، -١) ، ب = (-٢ ، ١)

الحل



∵ مركز الدائرة هو نقطة منتصف $\overline{أب}$

∴ م = ($\frac{٤ - ٢}{٢}$ ، $\frac{-١ + ١}{٢}$) = (١ ، ٠)

نق = م أ = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^{٢} + (ص_٢ - ص_١)^{٢}}$

نق = $\sqrt{(٤ - ١)^{٢} + (-١ - ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول

∵ م (١ ، ٠)

∴ ء = ١ ، هـ = ٠

نق = $\sqrt{١٠}$

∵ معادلة الدائرة هى (س – ء)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

∴ (س – ١)^{٢} + (ص – ٠)^{٢} = ($\sqrt{١٠}$)^{٢}

أى أن معادلة الدائرة تصبح على الصورة : (س – ١)^{٢} + ص^{٢} =١٠

❁ملاحظة (٣)

وضع النقطة م(س١، ص١) بالنسبة للدائرة د: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

❁ إذا كان(س١ − د)^{٢} + (ص١ − هـ)^{٢} = نق^{٢} فإن م تقع على الدائرة

❁ إذا كان(س١ − د)^{٢} + (ص١ − هـ)^{٢} > نق^{٢} فإن م تقع خارج الدائرة

❁ إذا كان(س١ − د)^{٢} + (ص١ − هـ)^{٢} < نق^{٢} فإن م تقع داخل الدائرة

مثال ٣

بين مواقع النقاط حيث م = (٩، ٣) ، ب = (٧ ،٥) ، جـ = (٢ ، −٣)
بالنسبة للدائرة د : (س − ٦)^{٢} + (ص +١)^{٢} = ٢٥



الحل

∴ نق^{٢} = ٢٥

أولاً بالتعويض بالنقطة م = (٩، ٣)

(٩ − ٦)^{٢} + (٣ +١)^{٢} = ٢٥ = نق^{٢} ∴ النقطة م تقع على الدئرة

ثانياً بالتعويض بالنقطة ب = (٧ ،٥)

(٧ − ٦)^{٢} + (٥ +١)^{٢} = ٣٧ > نق^{٢} ∴ النقطة ب تقع خارج الدئرة

ثالثاً بالتعويض بالنقطة جـ = (٢ ، −٣)

(٢ − ٦)^{٢} + (−٣+١)^{٢} = ٢٠ < نق^{٢} ∴ النقطة جـ تقع داخل الدئرة

ثانياً:الصورة العامة لمعادلة الدائرة

❁ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م = (ـل ، ـك) هى :

$س^2 + ص^2 + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠$ حيث يمكن استخراج قيم ل،ك،جـ من الصورة العامة لمعادلة الدائرة **كالاتى :-**

$$ل = \frac{١}{٢} \text{ معامل س } ، \quad ك = \frac{١}{٢} \text{ معامل ص}$$

$$جـ = ل^2 + ك^2 - نق^2 \Longleftarrow نق = \sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ} \ ، \ ل^2 + ك^2 - جـ > ٠$$

❁ ملاحظة (٤): على الصورة العامة لمعادلة الدائرة

١- الصورة العامة لمعادلة الدائرة تتصف بالاتى :-

❁ معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص .

❁ لا تحتوى على الحد س ص أى أن معامل س ص = ٠

❁ معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ =١

٢- لكى تمثل معادلة الدرجة الثانية فى س ، ص يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة بالاضافة إلى $ل^2 + ك^2 - جـ > ٠$

٣- عند تعيين مركز أو طول نصف قطر دائرة من معادلتها العامة يجب أن يكون : معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ =١ لذلك يجب القسمة على هذا المعامل إذا كان غير ١

مثال ٤

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التى معادلتها

٧س^{٢} + ٧ص^{٢} +٤٢س − ١٤ص + ٢٨ = ٠



الحل

٧س^{٢} + ٧ص^{٢} +٤٢س − ١٤ص + ٢٨ = ٠   بالقسمة على ٧ حتى يكون

معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} =١ فنحصل على المعادلة :

∴ س^{٢} + ص^{٢} +٦س − ٢ص + ٤ = ٠

معامل س = ٦ ⟸ ل = $\frac{١}{٢}$ معامل س = ٣   ⟸   ل = ٣

معامل ص = − ٢ ⟸ ك = $\frac{١}{٢}$ معامل ص= −١   ⟸   ك = − ١

جـ = ٤

ويكون احداثى مركزها م = (−ل ، −ك) = (− ٣ ، ١) ،

نق = $\sqrt{}$ل^{٢} + ك^{٢} −جـ = $\sqrt{}$(٣)^{٢} + (−١)^{٢} − ٤ = $\sqrt{٦}$ وحدة طول

مثال ٥

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها النقطة م= (−٢، ٣)

وطول نصف قطرها ٥ وحدة طول .



الحل

م = (−ل ، −ك) = (−٢، ٣) ⟸ ل = ٢ ، ك = − ٣ ، نق = ٥

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} − نق^{٢} = (٢)^{٢} + (− ٣)^{٢} − (٥)^{٢} = −١٢

ل = ٢
ك = − ٣
جـ = −١٢

∵ س^{٢} + ص^{٢} +٢ل س+ ٢ك ص + جـ = ٠

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} +٢ x ٢س + ٢ x − ٣ ص +(− ١٢) = ٠

∴ س^{٢} + ص^{٢} +٤س − ٦ ص − ١٢ = ٠

مثال ٦



أى من المعادلات الاتية تمثل دائرة ؟ وإذا كانت معادلة دائرة أوجد مركزها وطول نصف قطرها :



(١) $\frac{١}{٤}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} + س – ٨ = ٠

(٢) س^{٢} + ص^{٢} – ٢س + ٤ ص + ٧ =٠

(٣) ٣س^{٢} + ٢ص^{٢} +٦س – ٥ ص = ٠

(٤) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص – ١٢ = ٠

الحل

أولاً

$\frac{١}{٤}$ س^{٢} + $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} + س – ٨ = ٠   بالضرب x ٤

∴ س^{٢} + ص^{٢} + ٤س – ٣٢ = ٠   ⟸

ل = ٢
ك = ٠
ج = – ٣٢

∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} =١ ، والمعادلة خالية من الحد س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} – ج = ٢^{٢} + ٠^{٢} – (– ٣٢) = ٣٦ > ٠

∴ المعادلة تمثل دائرة مركزها م = (–ل ، – ك) = (– ٢ ، ٠)

وطول نصف قطرها نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} – ج}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ وحدة طول

ثانياً

س^{٢} + ص^{٢} – ٢س + ٤ ص + ٧ =٠   ⟸

ل = – ١
ك = ٢
ج = ٧

∵ ل^{٢} + ك^{٢} – ج =(– ١)^{٢} + ٢^{٢} – ٧ = – ٢ < ٠

∴ المعادلة لا تمثل دائرة

ثالثاً

٣س^{٢} + ٢ص^{٢} +٦س – ٥ ص = ٠

∵ معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢}

∴ المعادلة لا تمثل دائرة

رابعاً

س^{2} + ص^{2} + ٢ س ص – ١٢ = ٠

∵ المعادلة تحتوى على س ص ∴ المعادلة لا تمثل دائرة

ملاحظة (٥)

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما.

مثال ٧

بين أى دائرتين مما يأتى متطابقتان ؟ ولماذا؟

(١) س^{2} + ص^{2} –٤س +٨ص = ٠ ، س^{2} + ص^{2} +١٢ ص+١٦ = ٠

(٢) س^{2} + ص^{2} –٢س +٤ص–٣ = ٠ ، س^{2} + ص^{2} +٦س –١١ = ٠



الحل

أولاً

س^{2} + ص^{2} –٤س +٨ ص = ٠

ل = –٢ ، ك = ٤ ، جـ = ٠

نق$_{١}$ = $\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - \text{جـ}}$

= $\sqrt{(-٢)^{2} + (٤)^{2} - ٠}$

= ٢$\sqrt{٥}$ وحدة طول

س^{2} + ص^{2} +١٢ ص+١٦ = ٠

ل = ٠ ، ك = ٦ ، جـ = ١٦

نق$_{٢}$ = $\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - \text{جـ}}$

= $\sqrt{(٠)^{2} + (٦)^{2} - ١٦}$

= ٢$\sqrt{٥}$ وحدة طول



∵ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متطابقتان

ثانياً



س^٢ + ص^٢ −٢س +٤ص −٣ = ٠

ل = −١ ، ك = ٢ ، جـ = −٣

نق$_١$ = $\sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ - \text{جـ}}$

= $\sqrt{(-١)^٢ + (٢)^٢ - (-٣)}$

= ٢$\sqrt{٢}$ وحدة طول

س^٢ + ص^٢ +٦س −١١ = ٠

ل = ٣، ك = ٠ ، جـ = −١١

نق$_١$ = $\sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ك}^٢ - \text{جـ}}$

= $\sqrt{(٣)^٢ + (٠)^٢ - (-١١)}$

= ٢$\sqrt{٥}$ وحدة طول

∵ نق$_١$ ≠ نق$_٢$ ∴ الدائرتان غير متطابقتان

مثال ٨



أوجد معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة

س^٢ + ص^٢ − ١٢س + ٦ص + ٢٠ = ٠

بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢)

الحل

من الدائرة المعطاة :

ل = −٦

ك = ٣

جـ = ٢٠

نق^٢ = ل^٢ + ك^٢ − جـ = (−٦)^٢ + (٣)^٢ − ٢٠ = ٢٥

∵ الدائرتان متطابقتان ∴ نق`^{٢} = ٢٥

∵ مركز الدائرة المعطاة هو م = (٦ ، −٣)

∴ مركز الدائرة المطلوبة بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢) هو م` = (٦ + ٢، −٣ − ٢) = (٨، −٥)

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى (س − ٨)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥

ل` = −٨

ك` = ٥

جـ` = ٦٤

أو نوجدها على الصورة العامة حيث جـ` = (−٨)^٢ + (٥)^٢ − ٢٥ = ٦٤

⟸ س^٢ + ص^٢ − ١٦س + ١٠ص + ٦٤ = ٠

❁حالات خاصة لمعادلة الدائرة

١- معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل هى :-

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص = ٠ أى أن المعادلة خالية من الحد المطلق (جـ = ٠)

❁ أكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٥ ،−١٢) وتمر بنقطة الأصل

مركز الدائرة م = (−ل ، −ك) = (٥ ،−١٢)

−ل = ٥ ⟸ ل = −٥

−ك = −١٢ ⟸ ك = ١٢

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ × −٥ س + ٢ × ١٢ص = ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ٢٤ص = ٠

ل = −٥
ك = ١٢
جـ = ٠

٢- معادلة الدائرة التى مركزها على محور السينات :-

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + جـ = ٠ أى أن المعادلة خالية من الحد المشتمل على ص (ك=٠)

❁أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٣، ٠) وطول نصف قطرها ٥ وحدة طول

مركز الدائرة م = (−ل ، −ك) = (٣، ٠)

−ل = ٣ ⟸ ل = −٣

−ك = ٠ ⟸ ك = ٠

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} − نق^{٢} = (−٣)^{٢} + (٠)^{٢} − (٥)^{٢} = −١٦

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ × −٣ س + ٢ × ٠ × ص −١٦ = ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س −١٦ = ٠

ل = −٣
ك = ٠
جـ = −١٦

٣- معادلة الدائرة التى مركزها على محور الصادات :-

س^٢ + ص^٢ + ٢ك ص + جـ = ٠   أى أن المعادلة خالية من الحد المشتمل على س (ل = ٠)

❁أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٠، – ٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدة طول

مركز الدائرة م = (–ل ، –ك) = (٠، – ٤)

–ل = ٠ ⟸ ل = ٠

–ك = – ٤ ⟸ ك = ٤

جـ = ل^٢ + ك^٢ – نق^٢ = (٠)^٢ + (٤)^٢ – (٣)^٢ = ٧

س^٢ + ص^٢ + ٢ × ٠ × س + ٢ × ٤ ص + ٧ = ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^٢ + ص^٢ + ٨ ص + ٧ = ٠

ل = ٠
ك = ٤
جـ = ٧

٤- معادلة الدائرة التى تمس محور السينات :

س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ل^٢ = ٠   ويكون نق = |ك| ، جـ = ل^٢

❁أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ،–٤) وتمس محور السينات

∵ مركز الدائرة م = (–ل ، –ك) = (٣ ،–٤)

⟸ ل = – ٣ ، ك = ٤

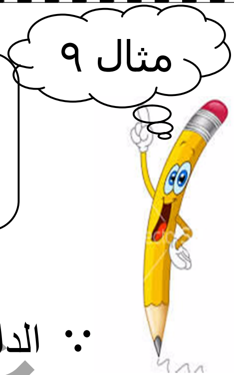
∵ الدائرة تمس محور السينات ⟸ نق = |ك| = |٤| = ٤

جـ = ل^٢ + ك^٢ – نق^٢ = (– ٣)^٢ + (٤)^٢ – (٤)^٢ = ٩

∴ س^٢ + ص^٢ + ٢ × – ٣ س + ٢ × ٤ ص + ٩ = ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^٢ + ص^٢ – ٦ س + ٨ ص + ٩ = ٠

ل = – ٣
ك = ٤
جـ = ٩



❁ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها ٦ وحدات وتمس محور السينات عند النقطة (٤ ،٠).

الحل

∵ الدائرة تمس محور السينات عند النقطة (٤ ،٠).

∴ المركز م = (٤ ، −ك)

∵ نق = |ك| = ٦ ك = ± ٦

∴ توجد دائرتان مركز إحداهما (٤ ، ٦) ، ومركز الأخرى (٤ ، − ٦)

❁ بالنسبة للدائرة الأولى التى مركزها (٤ ، ٦)

ل = −٤
ك = −٦
جـ =١٦

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} − نق^{٢} = (−٤)^{٢} + (−٦)^{٢} − (٦)^{٢} = ١٦

∴ س^{٢} + ص^{٢} +٢x −٤ س + ٢ x −٦ ص +١٦= ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س − ١٢ص +١٦ = ٠

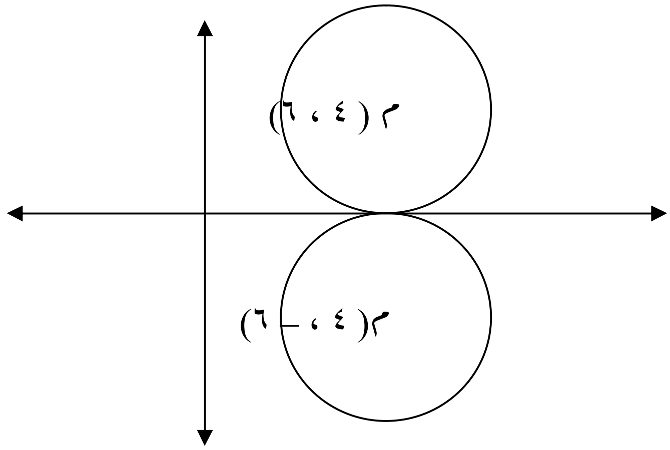
❁ بالنسبة للدائرة الثانية التى مركزها (٤ ، − ٦) :

ل = −٤
ك = ٦
جـ =١٦

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} − نق^{٢} = (−٤)^{٢} + (٦)^{٢} − (٦)^{٢} = ١٦

∴ س^{٢} + ص^{٢} +٢x −٤س + ٢ x ٦ ص +١٦= ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س +١٢ص +١٦= ٠



٥- معادلة الدائرة التى تمس محور الصادات :

س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + ك^٢ = ٠ ويكون نق = |ل| ، جـ = ك^٢

❀أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (–٢ ، –٣) وتمس محور الصادات

∵ مركز الدائرة م = (–ل ، –ك) = (–٢ ، –٣)

∴ –ل = –٢ ⟸ ل = ٢

∴ –ك = –٣ ⟸ ك = ٣

ل = ٢
ك = ٣
جـ = ٩

∵ الدائرة تمس محور الصادات ⟸ نق = |ل| = |٢| = ٢

جـ = ل^٢ + ك^٢ – نق^٢ = (٢)^٢ + (٣)^٢ – (٢)^٢ = ٩

∴ س^٢ + ص^٢ + ٢ × ٢ س + ٢ × ٣ ص + ٩ = ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^٢ + ص^٢ + ٤ س + ٦ ص + ٩ = ٠

مثال ١٠

❀ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣).



الحل

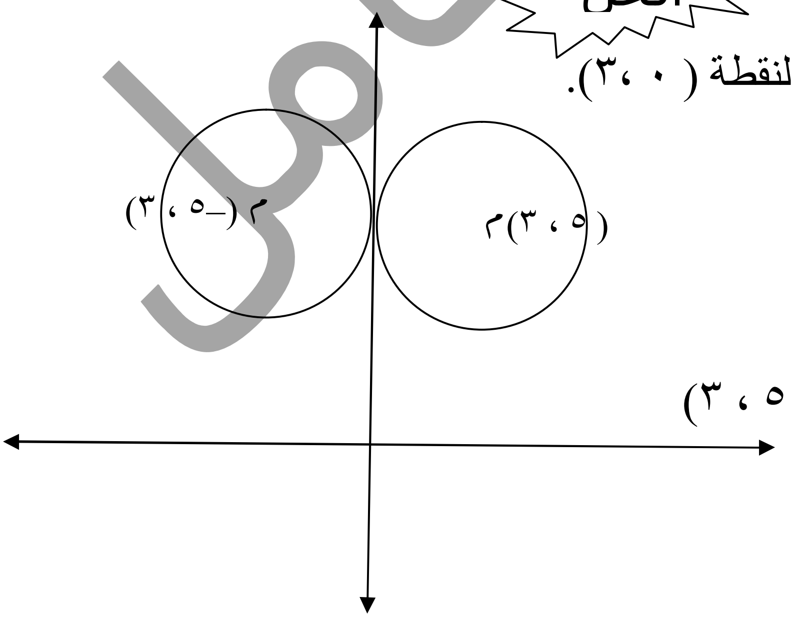
∵ الدائرة تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣).

∴ المركز م = (–ل ، ٣)

نق = |ل| = ٥ ⟸ ل = ± ٥

∴ توجد دائرتان مركز إحداهما (٥ ، ٣)

، ومركز الأخرى (–٥ ، ٣)



❁ بالنسبة للدائرة الأولى التى مركزها (٥ ، ٣)

ل = –٥
ك = –٣
جـ =٩

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} – نق^{٢} = (–٥)^{٢} + (–٣)^{٢} – (٥)^{٢} = ٩

∴ س^{٢} + ص^{٢} +٢x –٥ س + ٢ x –٣ ص + ٩= ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^{٢} + ص^{٢} –١٠س – ٦ص +٩ = ٠

❁ بالنسبة للدائرة الثانية التى مركزها (– ٥ ، ٣) :

ل = ٥
ك = –٣
جـ =٩

جـ = ل^{٢} + ك^{٢} – نق^{٢} = (٥)^{٢} + (–٣)^{٢} – (٥)^{٢} = ٩

∴ س^{٢} + ص^{٢} +٢x ٥ س + ٢ x –٣ ص + ٩= ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^{٢} + ص^{٢} +١٠س – ٦ص +٩ = ٠

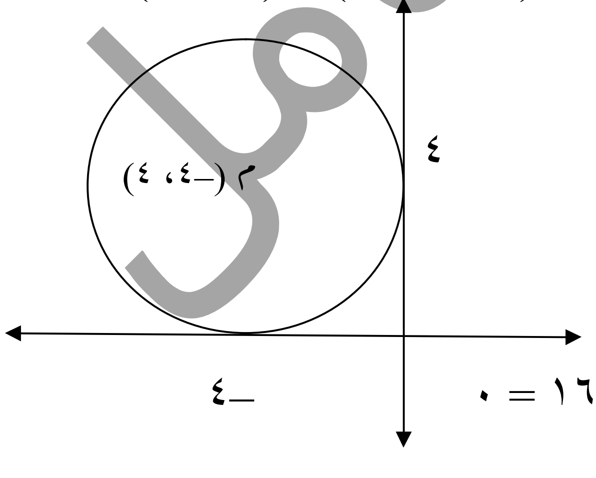
٦ - معادلة الدائرة التى تمس المحورين :

س^{٢} + ص^{٢} +٢ل س+ ٢ك ص + جـ = ٠ ويكون نق= |ل| = |ك|

حيث جـ = ل^{٢} = ك^{٢} = نق^{٢}

❁أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (–٤ ، ٤) وتمس المحورين السينى والصادى

∵ الدائرة تمس المحورين و مركزها النقطة م = (–ل ، –ك) = (–٤ ، ٤)



–ل = –٤ ⟸ ل = ٤

–ك = ٤ ⟸ ك = –٤

نق= |–٤| = |٤| = ٤ ⟸جـ= نق^{٢} = ١٦

∴ س^{٢} + ص^{٢} +٢x ٤ س + ٢ x –٤ ص +١٦ = ٠

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س – ٨ ص +١٦ = ٠

❁ملاحظة (٦)

وضع دائرة بالنسبة إلى دائرة أخرى : إذا كان م ، دائرة طول نصف قطرها نق$_1$، ن دائرة طول نصف قطرها نق$_2$ حيث نق$_1$ > نق$_2$:

إذا كانت الدائرتان م، ن	فـــــــــــــإن
(١) متباعدتين	م ن > نق$_1$ + نق$_2$
(٢) متماستين من الخارج	م ن = نق$_1$ + نق$_2$
(٣) متقاطعتين	نق$_1$ − نق$_2$ < م ن < نق$_1$ + نق$_2$
(٤) متماستين من الداخل	م ن = نق$_1$ − نق$_2$
(٥) متداخلتين	م ن < نق$_1$ − نق$_2$
(٦) متحدتى المركز	م ن = صفر

مثال ١١

هل الدائرتان د$_1$: س^2 + ص^2 − ١٠س − ٨ ص +١٦ = ٠

، د$_2$: س^2 + ص^2 +١٤س+ ١٠ص −٢٦ = ٠ متماستان من الخارج ؟

فـــسر إجابتك .



الحل

❁ بالنسبة للدائرة الأولى د$_1$ حيث مركزها م=(٥ ، ٤)

ل = −٥ ، ك = −٤ ، جـ = ١٦

نق$_1$ = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$ = $\sqrt{(-٥)^2+(-٤)^2-(١٦)}$ = ٥ وحدة طول

❁ بالنسبة للدائرة الثانية د$_2$ حيث مركزها ن=(−٧ ، −٥)

ل = ٧ ، ك = ٥ ، جـ = −٢٦

نق$_2$ = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - جـ}$ = $\sqrt{(٧)^2+(٥)^2-(-٢٦)}$ = ١٠ وحدة طول

نق١ + نق٢ = ٥ + ١٠ = ١٥ وحدة طول

البعد بين مركزى الدائرتين م ن $= \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

م ن $= \sqrt{(-٧ - ٥)^٢ + (-٥ - ٤)^٢} =$ ١٥ وحدة طول

م = (٥ ، ٤)
ن = (−٧ ، −٥)

∵ م ن = نق١ + نق٢ ∴ الدائرتان متماستان من الخارج

❁ملاحظة (٧)

١ – المماس للدائرة يكون عمودى على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس .

٢ – المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة متوازيان .

٣ – طول العمود المرسوم من النقطة (س١، ص١) على المستقيم الذى معادلته :

أس + ب ص + جـ = ٠ هو ل $= \dfrac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$

مثال ١٢

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م = (٢ ، ٣) والمستقيم ٣ س+٤ص +٢ = ٠ مماس لها عند النقطة هـ

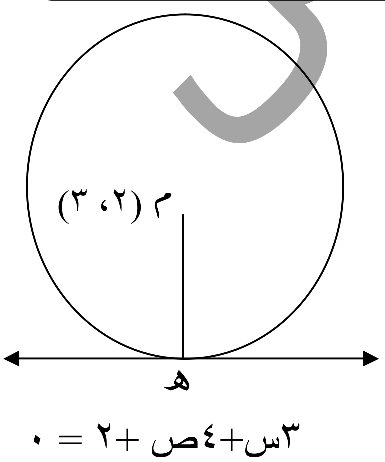
الحل

طول نصف قطر الدائرة يساوى طول العمود المرسوم من مركزها على المماس لها

م هـ = نق $= \dfrac{|\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}$

أ=٣ ، ب = ٤ ، جـ = ٢
س١= ٢ ، ص١ = ٣

$= \dfrac{|٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}} =$ ٤ وحدة طول



∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٣)^٢ = ٤^٢$

⟸ $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٣)^٢ = ١٦$

❁ملاحظة (٨)

❁إذا كانت النقطة أ ∈ ل الذى يقع فى مستوى الدائرة م التى طول نصف قطرها نق

❁ فإذا كان م أ > نق فإن المستقيم ل يقع خارج الدائرة م

❁ فإذا كان م أ = نق فإن المستقيم ل مماس للدائرة م

❁ فإذا كان م أ < نق فإن المستقيم ل قاطع للدائرة م

مثال ١٣



حدد وضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة : $($س$+3)^2 + ($ص$-4)^2 = 9$

إذا كانت معادلة المستقيم ل هى :

(١) ٣ س −٤ص +٥ = ٠

(٢) ٦س − ٨ ص +٢٣ = ٠

(٣) ٣ س −٤ص +١٠ = ٠



الحل

طول نصف قطر الدائرة نق = $\sqrt{9}$ = ٣ وحدة طول.

أ=٣ ، ب = −٤ ، جـ= ٥
س$_1$ = −٣ ، ص$_1$ = ٤

نحسب طول العمود المرسوم من مركز الدائرة م = (−٣ ، ٤) على كل مستقيم

أولاً طول العمود المرسوم من مركز الدائرة على المستقيم ل$_1$: ٣ س −٤ص +٥ = ٠

طول العمود = $\frac{|3\times -3 - 4\times 4 + 5|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}} = 4 >$ نق

∴ المستقيم ل$_1$ يقع خارج الدائرة

ثانياً طول العمود المرسوم من مركز الدائرة على المستقيم ل$_2$: ٦س − ٨ ص +٢٣ = ٠

أ=٦، ب = − ٨ ، جـ=٢٣
س$_1$ = −٣ ، ص$_1$ = ٤

طول العمود = $\frac{|6\times -3 - 8\times 4 + 23|}{\sqrt{(6)^2+(-8)^2}} = 2,7 <$ نق

∴ المستقيم ل$_2$ قاطع للدائرة

ثالثاً طول العمود المرسوم من مركز الدائرة على المستقيم ل٣ : ٣س – ٤ص + ١٠ = ٠

طول العمود = $\dfrac{\left|\text{٣} \times \text{–٣} - \text{٤} \times \text{٤} + \text{١٠}\right|}{\sqrt{(\text{٣})^{\text{٢}} + (\text{– ٤})^{\text{٢}}}}$ = ٣ = نق

أ = ٣ ، ب = –٤ ، جـ = ١٠
س١ = –٣ ، ص١ = ٤

∴ المستقيم ل٣ مماس للدائرة

ملاحظة (٩) إذا كان عدد أضلاع مضلع منتظم = ن ضلعا ، وطول نصف قطر الدائرة المارة برءوسه = نق فإن : مساحته = $\frac{\text{ن}}{\text{٢}}$ نق² جا $\frac{\text{٣٦٠°}}{\text{ن}}$

مثال ١٤



صمم مهندس معمارى مبنى قاعدته على شكل ثمانى منتظم تمر برؤوسه الدائرة س² + ص² – ٤س + ١٢ص – ٦٠ = ٠ إحسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة .

الحل

من معادلة الدائرة س² + ص² – ٤س + ١٢ص – ٦٠ = ٠

ل = –٢
ك = ٦
جـ = –٦٠

∴ نق² = ل² + ك² – جـ = (–٢)² + (٦)² – (–٦٠) = ١٠٠

∵ عدد أضلاع قاعدة المبنى ن = ٨ أضلاع

∴ مساحة قاعدة المبنى = $\frac{\text{ن}}{\text{٢}}$ نق² جا $\frac{\text{٣٦٠°}}{\text{ن}}$

= $\frac{\text{٨}}{\text{٢}}$ × ١٠٠ جا $\frac{\text{٣٦٠°}}{\text{٨}}$ = ٤٠٠ جا ٤٥ = ٢٠٠ $\sqrt{\text{٢}}$ وحدة مربعة

مثال ١٥

أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة سطح شكل خماسى منتظم تمر برؤوسه الدائرة س^{٢} + ص^{٢} +٦س – ١٢ص + ٥ = ٠ علماً بأن كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٥ سم .



الحل

ل = ٣

ك = –٦

جـ = ٥

من معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} +٦س – ١٢ص + ٥ = ٠

∴ نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} – جـ = (٣)^{٢} + (–٦)^{٢} – ٥ = ٤٠

∴ مساحة الشكل الخماسى المنتظم = $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\frac{٣٦٠^\circ}{ن}$

= $\frac{٥}{٢}$ $\times$ ٤٠ جا $\frac{٣٦٠^\circ}{٥}$ = ١٠٠ جا ٧٢ = ٩٥,١ وحدة مربعة



∵ كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٥ سم .

∴ الوحدة المربعة تمثل مساحة قدرها (٥)^{٢} = ٢٥ سم^{٢}

∴ مساحة الشكل الخماسى المنتظم = ٩٥,١ $\times$ ٢٥ = ٢٣٧٧,٥ سم^{٢}

تمارين(٩)

١ أكمل ما يأتى :-

١- (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٩ معادلة دائرة مركزها (.... ، ....) وطول نصف قطرها ......

٢- مركز الدائرة س^{٢} + ص^{٢} – ٦س + ٨ ص= ٠ هو النقطة (......، ......)

٣- النقطة (٢ ،٤) تقع............ الدائرة (س + ٢)^{٢} + (ص –٧)^{٢} = ٢٥

٤- معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها = $\sqrt{٢}$ وحدة طول هى ...

٥- طول نصف قطر الدائرة س^{٢} + ص^{٢} – ١٨ = ٠ يساوى .... وحدة طول

٦- إذا كانت المعادلة٢س^{٢} + م ص^{٢} + ب س ص – ٥ = ٠ تمثل دائرة فإن م= ...، ب = ...

٧- المعادلة ٣س^{٢} + ٢ص^{٢} – ٦س + ٨ ص= ٠ لا تعبرعن دائرة لأن ....

٢ إختر الإجابة الصحيحة :-

١- النقطة التى تقع على الدائرة (س –٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ هى ....

م (٢ ،٣) ب (٣ ، –٢) جـ (٢ ، ٥) ء (٤ ، ٣)

٢- معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، –٥) وطول نصف قطرها يساوى ٧ وحدات هى .....

م (س –٣)^{٢} + (ص –٥)^{٢} = ٤٩ ب (س +٣)^{٢} + (ص –٥)^{٢} = ٤٩

جـ (س –٣)^{٢} + (ص +٥)^{٢} = ٤٩ ء (س +٣)^{٢} + (ص +٥)^{٢} = ٤٩

٣- مركز الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} – ٦س + ٨ ص= ٠ هو النقطة ....

م (٣ ، –٤) ب (٤ ، –٣) جـ (–٣ ، ٤) ء (–٤ ، ٣)

٤- طول قطر الدائرة س^{٢} + ص^{٢} – ٢س – ٦ص +١= ٠ يساوى ....وحدة طول

م ٣ ب ٤ جـ ٥ ء ٦

٣ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة م= (٣، –٢) وطول نصف قطرها يساوى ٧ وحدة طول . [(س – ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤٩]

---

٤ أوجد معادلة الدائرة إذا كان أب قطر فيها حيث أ = (٦ ،–٤) ، ب =(٠ ، ٢)

[(س – ٣)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ١٨]

---

٥ بين مواقع النقاط أ = (–١، ٣) ، ب = (٠ ، –٥) ، جـ = (٢ ، ٤) بالنسبة للدائرة

د : (س + ٢)^{٢} + (ص –٧)^{٢} = ٢٥ [أ داخل الدائرة ، ب خارج الدائرة ، جـ على الدائرة]

---

٦ أوجد إحداثى المركز وطول نصف القطر لكل من الدوائر الأتية :

(أ) س^{٢}+ ص^{٢} = ٢٧ [م = (٠ ، ٠) ، نق=٣$\sqrt{٣}$ وحدة طول]

(ب) (س – ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٦ [م = (٢ ، ٠) ، نق= ٤وحدة طول]

(جـ) (س +٣)^{٢} + (ص – ٥)^{٢} = ٤٩ [م = (–٣ ، ٥) ، نق= ٧وحدة طول]

(ء) س^{٢} + ص^{٢}– ٤ س + ٦ص–١٢ =٠ [م = (٢، –٣) ، نق= ٥ وحدة طول]

(هـ) س^{٢} + ص^{٢}+ ٢ س = ٨ [م = (–١ ، ٠) ، نق= ٣وحدة طول]

(و) س^{٢} + ص^{٢}– ٦ س + ١٠ص =٠ [م = (٣ ، –٥) ، نق= $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول]

---

٧ أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها النقطة م= (–٢، ٥) وتمر بالنقطة أ(٣ ، ٢) .[إرشاد : إحسب نق= م أ ومعادلة الدائرة هى س^{٢} + ص^{٢}+ ٤ س – ١٠ص–٥ =٠]

٨ بين أى من المعادلات الاتية تمثل دائرة وايها لا يمثل دائرةمع ذكر السبب .

(١) $س^٢ + ٣ ص^٢ - ٢ س + ٤ص + ٥ = ٠$ [لا تمثل دائرة]

(٢) $٢س^٢ - س ص + ٢ص^٢ + ٥ س - ص - ٢ = ٠$ [لا تمثل دائرة]

(٣) $٢س^٢ + ٢ ص^٢ - ٦ س + ٤ص + ٩ = ٠$ [لا تمثل دائرة]

(٤) $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٤ص - ٤ = ٠$ [تمثل دائرة]

==

٩ أي من الدائرتين متطابقتان ؟

(أ) $س^٢ + ص^٢ + ١٤ص = ١$ ، $س^٢ + ص^٢ + ١٠س - ٢٥ = ٠$ [متطابقتان]

(ب) $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٦ص + ٣ = ٠$ ، $س^٢ + ص^٢ - ٤٩ = ٠$ [غيرمتطابقتان]

==

١٠ أوجد الصورة العامة التى مركزها النقطة (٣ ، ٤) وتمر بنقطة الأصل .

[$س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٨ ص = ٠$]

==

١١ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٤ ،٥) وتمس محور السينات

[$س^٢ + ص^٢ - ٨ س - ١٠ ص + ١٦ = ٠$]

==

١٢ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها ٣ وحدات وتمس محور السينات عند النقطة (٥ ، ٠). [$س^٢ + ص^٢ - ١٠س - ٦ص + ٢٥ = ٠$ أو $س^٢ + ص^٢ - ١٠س + ٦ص + ٢٥ = ٠$]

==

١٣ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٢ ،-٤) وتمس محور الصادات

[$س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٨ ص + ١٦ = ٠$]

١٤ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها ٤ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ،٣). [س^{٢} + ص^{٢} – ٨ س – ٦ص+٩ =٠أو س^{٢} + ص^{٢} +٨ س – ٦ص+٩ =٠]

==========

١٥ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٥ ، –٥) وتمس محورى الاحداثيات.

[س^{٢} + ص^{٢} – ١٠ س +١٠ص +٢٥= ٠]

==========

١٦ حدد موضع الدائرة د١ : (س –٥)^{٢} + (ص +٢)^{٢} = ٤ بالنسبة للدائرة

د٢ :(س +٧)^{٢} + (ص –٣)^{٢} = ١ [متباعدتان]

==========

١٧ اثبت أن الدائرتين (س +٢)^{٢} = ١ – ص^{٢} ، س^{٢} + ص^{٢} – ٢ س – ٨ ص–١٩ = ٠ متماستان من الداخل .

==========

١٨ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م = (٢ ،٣) والمستقيم ٥ س+١٢ص –٧= ٠ مماس لها عند النقطة هـ . [(س –٢)^{٢} + (ص – ٣)^{٢} = ٩]

==========

١٩ حدد وضع المستقيم ل : ٥س– ١٢ص +١٣= ٠ بالنسبة للدائرة التى معادلتها

س^{٢} + ص^{٢} – ٦ س + ٤ص–١٢ = ٠ [قاطع للدائرة]

==========

٢٠ أوجد مساحة مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعا وتمر برؤوسه بالدائرة

س^{٢} + ص^{٢} – ١٦= ٠ . [٤٨ وحدة مربعة]